ملاحظة: يمكننا برهان صحة استدلال بأكثر من طريقة:

إما عن طريق استخدام جدول الحقيقة ، أو عن طريق استخدام جبر القضايا (الخواص التي أوردناها بالمحاضرة السابقة) ، أو عن طريق المناقشة متى تكون الصيغة (القضية) صحيحة أو خاطئة وذلك حسب التمرين .

أما إذا حدد الدكتور طريقة فيجب الالتزام بها .

تمارين

- **برهن أن الصيغة الآتية هي استدلال** $F = \big((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)\big)$

سنثبت ذلك باستخدام جبر القضايا لنصل إلى أن $F = \top$

$$F = \big((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)\big)$$
$$= \big((\neg A \vee B) \Rightarrow (B \vee \neg A)\big)$$
$$= \neg(\neg A \vee B) \vee (B \vee \neg A) = \neg(\neg A \vee B) \vee (\neg A \vee B) = \top$$

- **هل الصيغة التالية استدلال؟** $G = \Big(\neg q \Rightarrow \big(\neg p \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)\big)\Big)$. سنتحقق من ذلك بطريقتين:

طريقة أولى : باستخدام جدول الحقيقة .

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$	G
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

نلاحظ أن عمود G كله واحدات أي القضية (الصيغة) G استدلال.

طريقة ثانية بالمناقشة كما يلي : تكون G خاطئة إذا كان $\neg q = 1$ و $\big(\neg p \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)\big) = 0$

أي $q = 0$ ، لنناقش قيم p

في حالة $p = 1$ نجد $(p \Rightarrow q) = 0$ و $\big(\neg p \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)\big) = 1$ وفي هذه الحالة لا يمكن أن تكون G خاطئة.

في حالة $p = 0$ نجد $(p \Rightarrow q) = 1$ و $\big(\neg p \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)\big) = 1$ وفي هذه الحالة أيضاً لا يمكن أن تكون G خاطئة.

مما سبق نجد أنه لا يمكن أن تكون G خاطئة . فهي استدلال.



- هل الصيغة التالية استدلال؟ $H = \Big(\big((p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p)\big) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)\Big)$

سنتحقق من ذلك باستخدام جدول الحقيقة (لاحظ هنا استخدام جبر القضايا في هذه الصيغة أمر معقد)

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p)$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	H
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

نلاحظ أن عمود H كله واحدات أي القضية (الصيغة) H استدلال.

- هل الصيغة التالية استدلال؟ $I = \Big((\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \big((p \land q) \Leftrightarrow p\big)\Big)$

سنستخدم لذلك أسلوب المناقشة، تكون I خاطئة إذا كان $(\neg q \Rightarrow \neg p) = 1$ و $\big((p \land q) \Leftrightarrow p\big) = 0$.

ويكون $\big((p \land q) \Leftrightarrow p\big) = 0$ في حالتين:

الحالة الأولى $p = 1$ و $(p \land q) = 0$ أي $q = 0$ ومن ثَمّ نجد $(\neg q \Rightarrow \neg p) = 0$ وهذا غير ممكن .

الحالة الثانية $p = 0$ و $(p \land q) = 1$ وهذا غير ممكن أيضاً .

مما سبق نجد أنَّه لا يمكن أنْ تكون I خاطئة ،فهي استدلال .

- هل الصيغة التالية استدلال؟ $J = \Big((q \Rightarrow p) \land \big((\neg q \Rightarrow p) \land \neg q\big)\Big)$

سنبين ذلك باستخدام جبر القضايا .

$$J = \Big(\big((\neg q \lor p) \land (q \lor p)\big) \land \neg q\Big) = \left(\left(\overbrace{(\neg q \land q)}^{\perp} \lor p\right) \land \neg q\right) = (p \land \neg q)$$

نلاحظ أنَّ J ليست صحيحة دوماً ، فهي ليست استدلال.

ملاحظة : إذا طلب منا كتابة صيغة مكافئة لِـ J مثلاً باستخدام الروابط $\neg$ و $\Rightarrow$ فقط ، فعندئذٍ نقوم بما يلي :

$$J = (p \land \neg q) = \neg(\neg p \lor q) = \neg(p \Rightarrow q)$$

- هل الصيغة التالية استدلال؟ $K = \big((p \Rightarrow q) \land (p \Rightarrow \neg q)\big)$

سنبين ذلك باستخدام جبر القضايا .

$$K = \big((p \Rightarrow q) \land (p \Rightarrow \neg q)\big) = \big((\neg p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q)\big) = \big(\neg p \lor (q \land \neg q)\big)$$
$$= (\neg p \lor \perp) = \neg p$$

نلاحظ أنَّ K ليست صحيحة دوماً ، فهي ليست استدلال.



ملاحظة : إذا طلب منا كتابة صيغة مكافئة لِـ K مثلاً باستخدام الروابط $\neg$ و $\Longrightarrow$ فقط ، فعندئذٍ نقوم بما يلي :

$$K = \neg p = (p \Longrightarrow \neg p)$$

- **هل الصيغة التالية استدلال؟** $M = \big((p \wedge (p \Longrightarrow q)) \Longrightarrow q\big)$

سنبين ذلك بالمناقشة ، تكون M خاطئة إذا كانت $(p \wedge (p \Longrightarrow q)) = 1$ و $q = 0$ ، لنناقش قيم p .

عندما يكون $p = 0$ يكون $(p \Longrightarrow q) = 1$ ومن ثَمَّ $(p \wedge (p \Longrightarrow q)) = 0$ وهذا غير ممكن .

عندما يكون $p = 1$ يكون $(p \Longrightarrow q) = 0$ ومن ثَمَّ $(p \wedge (p \Longrightarrow q)) = 0$ وهذا غير ممكن أيضاً .

إذنْ لا يمكن أن تكون M خاطئة ، فهذه الصيغة استدلالٌ.

وهو استدلالٌ هام جداً .ويمكن التعبير عنه بالطريقة الطابقية كما يلي :

$$\frac{p \,,\; p \Longrightarrow q}{q}$$

ملاحظة :

لابدَّ وأنْ تكون قد لاحظتَ أنَّنا تارةً كنا نضع أقواساً، وتارةً أخرى لا نضع. نعم عندما لا يكون ثمَّة التباس يمكننا إزالة الأقواس .

كما أننا وضعنا إشارة مساواة بين الصيغ ونعود ونكرر، نضعها تجاوزاً ، وأيضاً نضع $p = 0$ تجاوزاً ونقصد به أن $\delta(p) = 0$.

ملاحظة :

قوانين (استدلالات) تُستخدم كثيراً

$$p \vee (p \wedge q) = p$$
$$p \wedge (p \vee q) = p$$

$$\neg p \vee (p \wedge q) = \neg p \vee q$$
$$\neg p \wedge (p \vee q) = \neg p \wedge q$$

.: انتهت المحاضرة الرابعة :.